7　分数関数・無理関数

Practice 7

$$f(x)=\frac{2(x+1)-1}{x+1}$$
$$=2-\frac{1}{x+1}$$

より，漸近線は $x=-1$ と $y=2$　・・・ア

$\dfrac{2x+1}{x+1}>1-2x$ の両辺に $(x+1)^2$ $(x\neq -1)$ を掛けると，

$(x+1)^2>0$ より，$(2x+1)(x+1)>(1-2x)(x+1)^2$ $(x\neq -1)$

両辺の差をとって整理すると，$x(x+1)(2x+3)>0$ $(x\neq -1)$

よって，$-\dfrac{3}{2}<x<-1,\ 0<x$　・・・イ

32

(1)

$$y=\frac{-4x+6}{2x-5}$$
$$=\frac{-2(2x-5)-4}{2x-5}$$
$$=-2-\frac{4}{2x-5}$$

より，漸近線は $x=\dfrac{5}{2},\ y=-2$

(2)

$g(x)$ の式

$(x,\ f(x))$ を y 軸に関して対称移動した点を $(X,\ Y)$ とすると，

$X=-x$　$\therefore x=-X$　・・・①

y 座標は変化しないから，$Y=f(x)$　・・・②

①と②より，Y と X の関係式は $Y=f(-X)$

$X,\ Y$ をそれぞれ $x,\ y$ に書き直すことにより，$y=f(-x)$

これと $f(x)=\sqrt{5x}$ より，$y=\sqrt{-5x}$

よって，$g(x)=\sqrt{-5x}$

$h(x)$ の式

$(x,\ g(x))$ を x 軸方向に 10 だけ平行移動した点を $(X,\ Y)$ とすると，

$X=x+10$　$\therefore x=X-10$　・・・③

y 座標は変化しないから，$Y=g(x)$　・・・④

③と④より，Y と X の関係式は $Y=g(X-10)$

X, Y をそれぞれ x, y に書き直すことにより，$y = g(x-10)$

これと $g(x) = \sqrt{-5x}$ より，$g(x-10) = \sqrt{-5(x-10)}$

よって，$h(x) = \sqrt{-5(x-10)}$

グラフ略

33

(1)

$$
\begin{aligned}
y &= \frac{bx+1}{x-a} \\
&= \frac{b(x-a)+ab+1}{x-a} \\
&= b + \frac{ab+1}{x-a}
\end{aligned}
$$

より，

$y = \dfrac{bx+1}{x-a}$ は双曲線 $y = \dfrac{ab+1}{x}$ を x 軸方向に a，y 軸方向に b だけ平行移動した曲線である。

これと $a > 0,\ b > 0$ より，$y = \dfrac{bx+1}{x-a}$ は $-a \leq x \leq 0$ において単調に減少する。

よって，$x = -a$ のとき $y = 1$，$x = 0$ のとき $y = -1$

すなわち $1 = \dfrac{-ab+1}{-a-a}$，$-1 = \dfrac{1}{-a}$　$\therefore 2a = ab - 1,\ a = 1$　$\therefore (a,\ b) = (1,\ 3)$

(2)

$y = \sqrt{a-4x} + b$ は曲線 $y = \sqrt{-4x}$ を x 軸方向に $\dfrac{a}{4}$，y 軸方向に b だけ平行移動した曲線である。これと $a > 0$ より，$y = \sqrt{a-4x} + b$ は $-4 \leq x \leq 0$ において単調に減少する。

よって，$x = -4$ で最大値 5，$x = 0$ で最小値 3 をとる。

したがって，

$5 = \sqrt{a+16} + b$　・・・①

$3 = \sqrt{a} + b$　・・・②

①－②より，$2 = \sqrt{a+16} - \sqrt{a}$　$\therefore \sqrt{a+16} = \sqrt{a} + 2$

この両辺を 2 乗して整理すると，$4\sqrt{a} = 12$ すなわち $\sqrt{a} = 3$　$\therefore a = 9$　・・・ア

これを②に代入して整理すると，$b = 0$　・・・イ

34

(1)

与式の両辺に $x(x-1)(x-2)(x-3)$ を掛けると，

$(x-1)(x-2)(x-3)+x(x-2)(x-3)+x(x-1)(x-3)+x(x-1)(x-2)=0$

ここで，

$$
\begin{aligned}
\text{左辺} &= \{(x-1)(x-2)(x-3)+x(x-1)(x-2)\}+\{x(x-2)(x-3)+x(x-1)(x-3)\} \\
&= (x-1)(x-2)(2x-3)+x(x-3)(2x-3) \\
&= 2(2x-3)(x^2-3x+1)
\end{aligned}
$$

より，

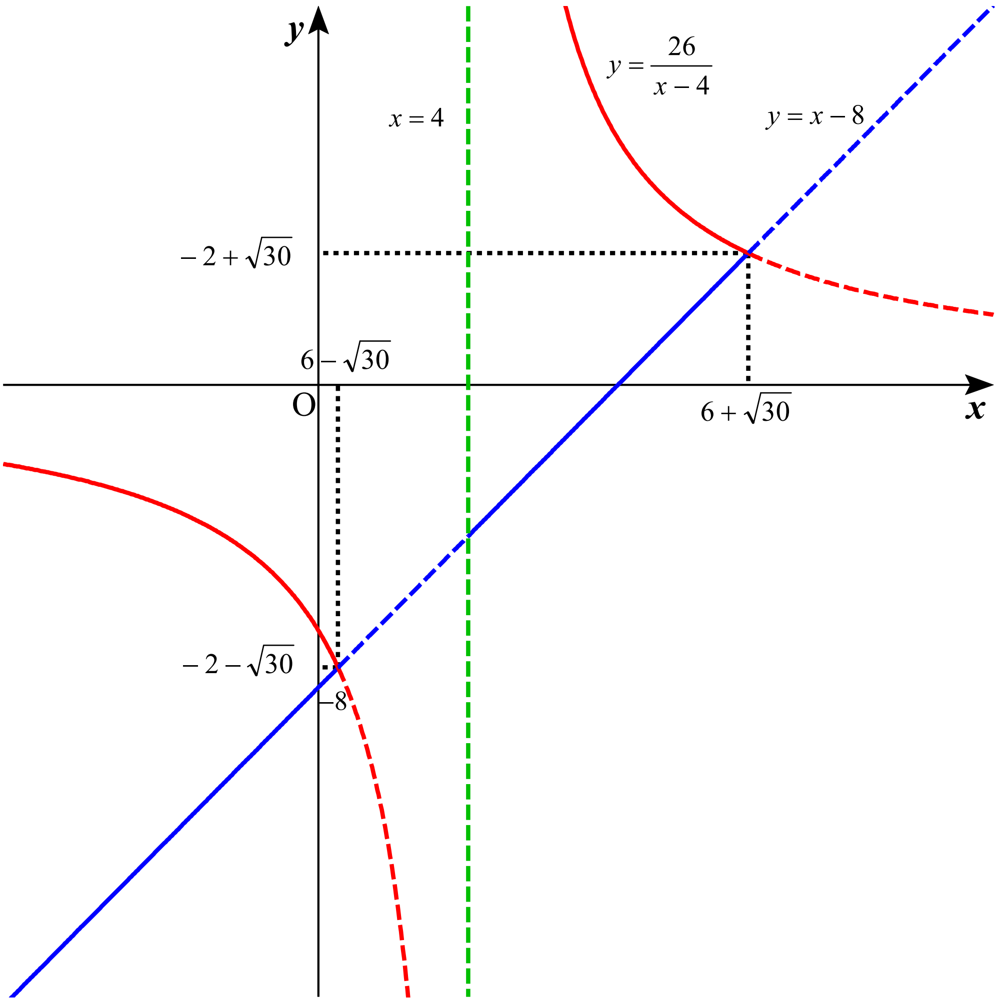
$(2x-3)(x^2-3x+1)=0 \quad \therefore x=\dfrac{3}{2},\ \dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$

(2)

与式の両辺に $(x-4)^2$ を掛けることにより，$(x-8)(x-4)^2 \leq 26(x-4)$ （$x \neq 4$）

両辺を整理すると，$(x-4)(x^2-12x+6) \leq 0$ （$x \neq 4$）

よって，$x \leq 6-\sqrt{30},\ 4 < x \leq 6+\sqrt{30}$



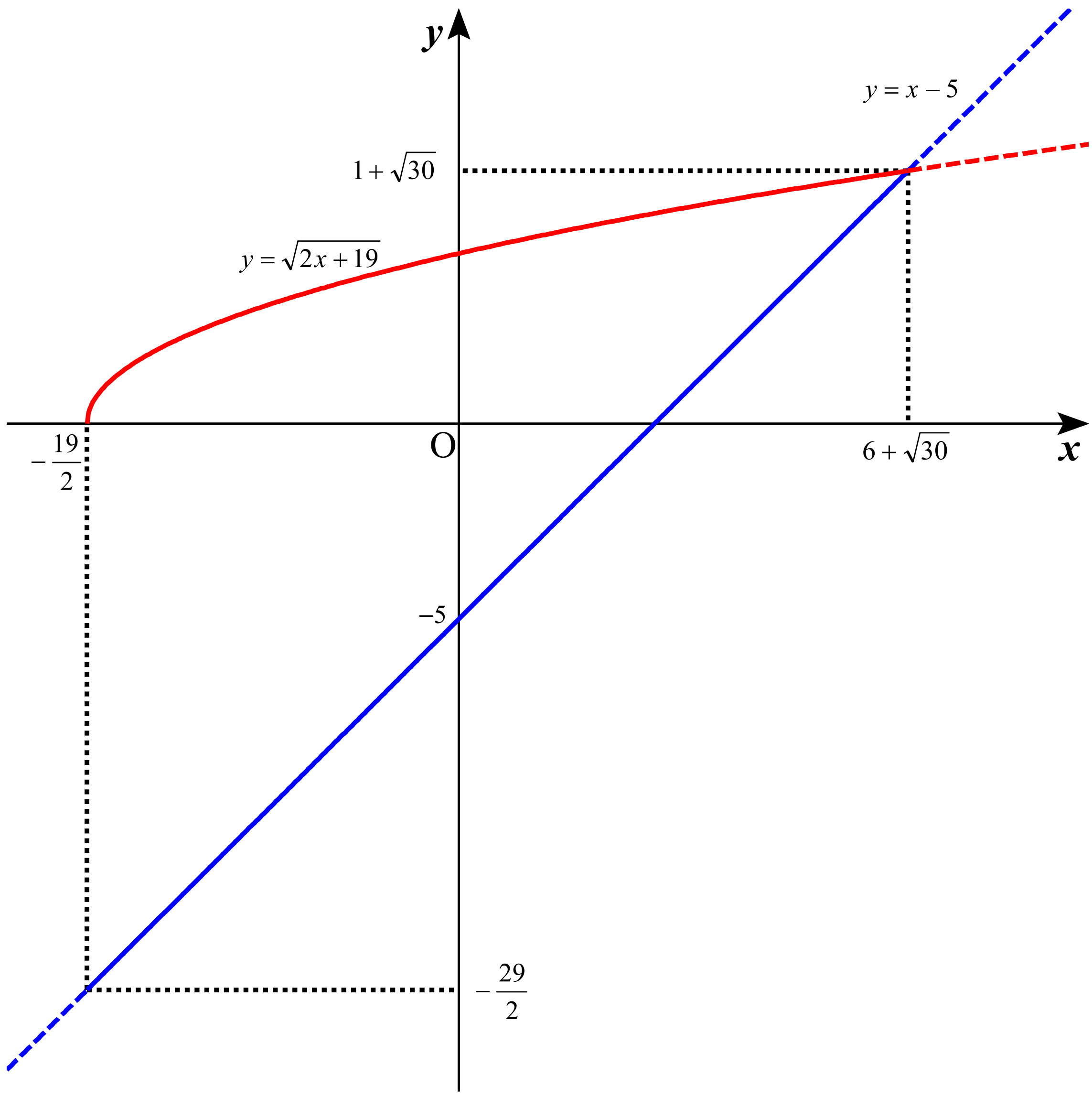
(3)

$x-5 \leq \sqrt{2x+19} \Leftrightarrow (x-5<0 \cap 2x+19 \geq 0) \cup \left((x-5)^2 \leq 2x+19 \cap x-5 \geq 0\right)$

$x-5<0 \cap 2x+19 \geq 0$ より，$-\dfrac{19}{2} \leq x < 5$ ・・・①

$(x-5)^2 \leq 2x+19 \cap x-5 \geq 0$ より，$5 \leq x \leq 6+\sqrt{30}$ ・・・②

①または②より，$-\dfrac{19}{2} \leq x \leq 6+\sqrt{30}$



35

ア

$\dfrac{q}{p}=k$ とおくと $q=kp$

$(p,\ q)$ すなわち $(p,\ kp)$ は $(x-5)^2+(y-5)^2=1$ 上の点だから，

$(p-5)^2+(kp-5)^2=1$ が成り立つ。

これを p について整理すると， $(k^2+1)p^2-2(5k+5)p+49=0$

これを満たす p は実数だから，判別式を D とすると， $D\geq 0$ より，

$$\frac{D}{4}=(5k+5)^2-49(k^2+1)$$
$$=-2(12k^2-25k+12)$$
$$=-2(3k-4)(4k-3)\geq 0$$

$$\therefore \frac{3}{4}\leq k\leq \frac{4}{3} \quad ・・・①$$

よって， $\dfrac{q}{p}$ の最大値は $\dfrac{4}{3}$

イ

$$\frac{p-q}{p+q}=\frac{p\left(1-\dfrac{q}{p}\right)}{p\left(1+\dfrac{q}{p}\right)}$$
$$=\frac{1-\dfrac{q}{p}}{1+\dfrac{q}{p}}$$
$$=\frac{1-k}{1+k}$$
$$=\frac{-(1+k)+2}{1+k}$$
$$=-1+\frac{2}{1+k}$$

①より， $\dfrac{7}{4}\leq 1+k\leq \dfrac{7}{3}$ だから， $\dfrac{3}{7}\leq \dfrac{1}{1+k}\leq \dfrac{4}{7}$

よって， $-1+2\cdot\dfrac{3}{7}\leq -1+\dfrac{2}{1+k}\leq -1+2\cdot\dfrac{4}{7}$ すなわち $-\dfrac{1}{7}\leq \dfrac{p-q}{p+q}\leq \dfrac{1}{7}$

ゆえに， $\dfrac{p-q}{p+q}$ の最大値は $\dfrac{1}{7}$

36

(1)

$$f\left(\sqrt{7}\right)=\frac{8\sqrt{7}+21}{3\sqrt{7}+8}$$
$$=\frac{\frac{8}{3}\left(3\sqrt{7}+8\right)-\frac{64}{3}+21}{3\sqrt{7}+8}$$
$$=\frac{8}{3}-\frac{1}{3\left(3\sqrt{7}+8\right)}$$
$$=\frac{8}{3}-\frac{1}{3}\cdot\frac{8-3\sqrt{7}}{\left(8+3\sqrt{7}\right)\left(8-3\sqrt{7}\right)}$$
$$=\frac{8}{3}-\frac{1}{3}\left(8-3\sqrt{7}\right)$$
$$=\sqrt{7}$$
$$\therefore f\left(\sqrt{7}\right)=\sqrt{7}$$

(2)

解法 1

$$f(x)-2=\frac{8x+21}{3x+8}-2$$
$$=\frac{2x+5}{3x+8}$$

より，

$f(x)-2\geq 0$ すなわち $f(x)\geq 2$ ならば $(2x+5)(3x+8)\geq 0$ （$x\neq -\frac{8}{3}$）

すなわち $x<-\frac{8}{3}$ または $-\frac{5}{2}\leq x$

よって， $x\geq 0$ は $f(x)\geq 2$ であるための十分条件である。

ゆえに， $x\geq 0$ ならば $f(x)\geq 2$ である。

解法 2

$y=f(x)$ または $y=f(x)-2$ のグラフを描いて題意を示せばよい。

(3)

解法 1

$$\left|f(x)-f(y)\right|=\frac{|x-y|}{|(3x+8)(3y+8)|}$$

ここで，$x\geq 2,\ y\geq 2$ より，$0<\dfrac{1}{3x+8}\leq\dfrac{1}{14},\ 0<\dfrac{1}{3y+8}\leq\dfrac{1}{14}$

$$\therefore 0<\frac{1}{(3x+y)(3y+8)}\leq\frac{1}{14^2}\leq\frac{1}{10^2}=\frac{1}{100}$$

よって，

$$\left|f(x)-f(y)\right|=\frac{|x-y|}{|(3x+8)(3y+8)|}\leq\frac{|x-y|}{100}$$

解法 2：平均値の定理を利用

$x=y$ のとき

$$\left|f(x)-f(y)\right|=\frac{|x-y|}{100}\quad\cdot\cdot\cdot①$$

$x\neq y$ のとき

$f(t)$ は $t=-\dfrac{8}{3}$ でない実数 t について微分可能である。

また，このとき $f'(t)=\dfrac{1}{(3t+8)^2}$

そこで，$x<y$ とすると，

$x\geq 2,\ y\geq 2$ において，$\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}=f'(c)\ (x<c<y)$ を満たす c が存在する。

よって，$\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}=\dfrac{1}{(3c+8)^2}<\dfrac{1}{(3x+8)^2}\leq\dfrac{1}{14^2}<\dfrac{1}{10^2}=\dfrac{1}{100}$

これは $x>y$ の場合も成り立つ。

ゆえに，$\left|\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}\right|=\dfrac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|}<\dfrac{1}{100}\quad\cdot\cdot\cdot②$

よって，①，②より，$\dfrac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|}\leq\dfrac{1}{100}$

すなわち $\left|f(x)-f(y)\right|\leq\dfrac{|x-y|}{100}$

(4)

(1)より，$f\left(\sqrt{7}\right)=\sqrt{7}\geq 2$

(2)より，$x\geq 2$ ならば $f(x)\geq 2$

よって，(3)より，

$$\left|f(f(x))-\sqrt{7}\right|=\left|f(f(x))-f\left(f\sqrt{7}\right)\right|$$
$$\leq\frac{\left|f(x)-f\left(\sqrt{7}\right)\right|}{100}$$
$$\leq\frac{\frac{\left|x-\sqrt{7}\right|}{100}}{100}$$
$$=\frac{\left|x-\sqrt{7}\right|}{10000}$$

$\dfrac{\left|2-\sqrt{7}\right|}{10000}<\dfrac{1}{10000}=10^{-4}$ より，$\left|f(f(2))-\sqrt{7}\right|\leq\dfrac{\left|2-\sqrt{7}\right|}{10000}<10^{-4}$

よって，条件を満たす有理数 r の 1 つは $f(f(2))=f\left(\dfrac{37}{14}\right)=\dfrac{590}{223}$